Aufgabenkatalog Analysis – Sommersemester 2019
Aufgaben zum Thema **Differenzierbarkeit**
Dr. Anton Malevich, Leonard Bechtel, Julian Maas

Aufgabe 1 (2) *Ableiten per Differentialquotient*
Berechnen Sie die ersten Ableitungen folgender Funktionen in einem beliebigen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ durch Auswerten der Differentialquotienten:

i) $f_1(x) = a, \quad a \in \mathbb{R}$ konstant

ii) $f_2(x) = x$

iii) $f_3(x) = x^2$

iv) $f_4(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}$

v) $f_5(x) = \dfrac{1}{x} \quad (x \neq 0)$

vi) $f_6(x) = \sqrt{x} \quad (x > 0)$

Aufgabe 2 (3) *Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit*
Zeigen Sie:
Ist $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in D \subset \mathbb{R}$ differenzierbar, so ist f auch stetig in x_0.
Gilt auch die Umkehrung dieser Aussage?

Aufgabe 3 (3) *Regularisierung stetiger Funktionen*
Seien zwei Funktionen $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben mit

$$f(x) = x \cdot g(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

und sei $g(x)$ stetig im Punkt $x_0 = 0$.

i) Zeigen Sie, dass dann $f(x)$ in x_0 differenzierbar ist. Bestimmen Sie $f'(x_0)$ in Abhängigkeit von $g(x)$.

ii) Geben Sie ein Beispiel einer in x_0 stetigen, aber nicht differenzierbaren Funktion $g(x)$, für welche $f'(x_0)$ existiert. Bestimmen Sie $f'(0)$.

iii) Geben Sie (falls möglich) für ihr Beispiel außerdem die komplette Ableitungsfunktion $f'(x)$ an oder begründen Sie, warum das nicht möglich ist.

Es sei nun $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion, die differenzierbar in $x_0 = 0$ ist und es gelte $f(x_0) = 0$.

iv) Zeigen Sie, dass dann eine Funktion $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ existiert, die stetig in x_0 ist und für die gilt
$$f(x) = x \cdot g(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 4 (2) *Beispiel Regularisierung*
Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f_n : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

für $n = 0, 1, 2$ auf Stetigkeit, Differenzierbarkeit und stetige Differenzierbarkeit im Punkt $x_0 = 0$.

Aufgabe 5 (3) *Vererbung der Differenzierbarkeit*
Es seien $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ differenzierbar und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Beweisen Sie, dass dann folgende Funktionen ebenfalls differenzierbar in $x_0 \in D$ sind, indem Sie ihre Ableitungen in x_0 angeben:

i) $h_1(x) := \lambda f(x) + \mu g(x)$ (Linearkombinationen diffbarer Funktionen)

ii) $h_2(x) := f(x)g(x)$ (Produkte diffbarer Funktionen)

iii) $h_3(x) := \dfrac{f(x)}{g(x)} \quad g(x) \neq 0 \ \forall x \in D$ (Quotienten diffbarer Funktionen)

iv) $h_4(x) = g \circ f(x) = g(f(x))$ (Kompositionen diffbarer Funktionen)

Wobei für die letzte Teilaufgabe iv) gelte $f : D \longrightarrow E$ ist differenzierbar in $x_0 \in D$ und $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar in $y_0 := f(x_0)$.

Aufgabe 6 (1) *Ableiten*
Differenzieren Sie die folgenden Funktionen unter Verwendung der bekannten Ableitungsregeln:

i) $f_1(x) := x^5 - 5x^4 + 6x - 2$

ii) $f_2(x) := 2x^3 - 5x - 3\sin x + \sin\frac{\pi}{8}$

iii) $f_3(x) := \dfrac{x^3 - 2x - 4}{x^2 - 1}$

iv) $f_4(x) := \tan x$

v) $f_5(x) := (2x^3 - 3x + 4\sin x)^7$

vi) $f_6(x) := (x^4 + 4x)\cos x$

vii) $f_7(x) := \dfrac{x^2 - \sin(x^2 + 1)}{(\cos(2x))^2}$

viii) $f_8(x) := \cot x$

ix) $f_9(x) := \dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

x) $f_{10}(x) := x^x$

Aufgabe 7 (2) *Logarithmische Ableitung*

i) Beweisen Sie mit dem Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion, dass gilt

$$\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}, \quad x \in (0, \infty)$$

ii) Beweisen Sie nun, dass für jede differenzierbare Funktion $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{d}{dx} \ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x).}$$

Bemerkung: Das ist die sog. *logarithmische Ableitung* der Funktion $f(x)$.

iii) Berechnen Sie unter Verwendung der Regel aus ii) die Ableitungen von

- $f(x) = (1 + x)(1 + e^{x^2})$
- $g(x) = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$

Aufgabe 8 (3) *Zusammenhang Monotonie und Ableitung*
Sei für $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, die Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b). Zeigen Sie, dass dann gilt:

i) $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x)$ monoton steigend auf $[a, b]$

ii) $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x)$ monoton fallend auf $[a, b]$

iii) $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \Longrightarrow \quad f(x)$ streng monoton steigend auf $[a, b]$

iv) $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \Longrightarrow \quad f(x)$ streng monoton fallend auf $[a, b]$

Achtung: Die Umkehrung der letzten beiden Aussagen gilt im Allgemeinen nicht. Überlegen Sie sich dazu jeweils ein Beispiel.

Aufgabe 9 (3) *Identitätssatz der Differentialrechnung*
Sei für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ und $c \leq d$, die Funktionen $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ $g : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar. Zeigen Sie, dass dann gilt:

i) $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = k$ für ein $k \in \mathbb{R}$

ii) $f'(x) = g'(x) \quad \forall x \in (a, b) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = g(x) + k \quad \forall x \in (a, b)$ für ein $k \in \mathbb{R}$

Aufgabe 10 (3) *Anwendung Mittelwertsatz*
Eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ erfülle

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2 \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass f konstant ist.

Aufgabe 11 (2) *Zum Satz von Rolle*
Betrachten Sie die zusammengesetzte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \in [0, 1) \\ 0, & \text{falls } x = 1 \end{cases}$$

Ist der Satz von Rolle anwendbar? Begründen Sie.

Aufgabe 12 (1) *Extremwertbestimmung I*
Bestimmen Sie zu den folgenden Funktionen $f_i : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, i \in \{1, 2, 3, 4\}$ jeweils den maximalen Definitionsbereich D, sowie Art und Lage aller ihrer Extrempunkte.

i) $f_1(x) := \dfrac{\ln x - 1}{x}$

ii) $f_2(x) := \dfrac{2x + 3}{x^2 - 4}$

iii) $f_3(x) := \sqrt{3x - 5}$

iv) $f_4(x) := 2((\ln x)^2 - 1)$

Aufgabe 13 (2) *Extremwertbestimmung II*
Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_a(x) := x^2 + ax + a^2$ mit $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass jede dieser Funktionen genau einen Tiefpunkt hat und bestimmen Sie danach die Gleichung der Funktion $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ auf der die Tiefpunkte aller Funktionen f_a liegt.

Aufgabe 14 (2) *Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen*
Lösen Sie folgende Textaufgaben zur bestimmung von Extremwerten unter Nebenbedingungen:

i) Eine zylinderförmige Konservendose mit (vorgegebenen) Volumen V soll aus Weißblech hergestellt werden. Dabei soll der Blechverbrauch möglichst gering sein. Bestimmen Sie die Höhe h und den Durchmesser d der Dose.

ii) Aus einer rechteckigen Blechtafel mit 480mm Länge und 300mm Breite soll ein oben offener quaderförmiger Behälter entstehen. Dazu werden an den vier Ecken quadratische Ausschnitte herausgeschnitten, so dass die dadurch entstandenen Seitenteile hochgebogen werden können. Diese werden dann an den Kanten miteinander verschweißt. Welche Kantenlänge x müssen die herausgeschnittenen Eckstücke haben, damit das Volumen V des Behälters möglichst groß wird? Wie groß wird dann das Volumen V ?

iii) In eine Kugel mit dem Durchmesser D soll ein möglichst großer Zylinder einbeschrieben werden. Bestimmen Sie den Durchmesser d und die Höhe h des Zylinders.

iv) Ein Wasserstollen soll im Querschnitt die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis haben. Wie groß sind die Stollenwandhöhe (also die, des Rechtecks) h und der Durchmesser D zu wählen, damit der Stollen bei einer Querschnittfläche von $5m^2$ einen möglichst kleinen Umfang hat?

v) Ein Hochregallager mit einem Gesamtvolumen von $500m^3$ soll möglichst kostengünstig hergestellt werden. Dabei belaufen sich die Kosten für die Wände auf 1000€$/m^2$, die der Decke auf 600€$/m^2$ und die für den Boden auf 400€$/m^2$. Welche Maße sollten verwendet werden, wenn ein quadratischer Grundriss gewählt wird?

Aufgabe 15 (2) *Taylorpolynom I*
Die Funktion $f : (-1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

i) Finden Sie eine allgemeine Formel für die n-te Ableitung ($n \in \mathbb{N}$) von f und beweisen Sie diese.

ii) Berechen Sie das Taylorpolynom 2. Grades um den Entwicklungspunkt $x_0 = 2$ und schätzen Sie das Restglied auf dem Intervall $[1, 3]$ ab.

Aufgabe 16 (2) *Taylorpolynom II*
Gegeben Sei die Funktion $f(x) := \sqrt[3]{2x+2}, x \geq -1$.

i) Stellen Sie das Taylorpolynom 2. Grades von f im Entwicklungspunkt $x_0 = 3$ auf.

ii) Schätzen Sie das Lagrange-Restglied zum Taylorpolynom 2. Grades für $x \in [-\frac{1}{2}, 3]$ unabhängig von x ab.

Aufgabe 17 (3) *Taylorreihe*
Berechnen Sie alle Ableitungen $f^{(n)}, n = 0, 1, 2, \cdots$ der Funktion f und geben Sie damit die Taylorreihe für f im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ an.

i) $f(x) = \sin(3x), \quad x \in \mathbb{R}$

ii) $f(x) = \sqrt{1+x}, \quad |x| \leq 1.$

Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren diese Reihen?